

(12) DEMANDE INTERNATIONALE PUBLIÉE EN VERTU DU TRAITÉ DE COOPÉRATION  
EN MATIÈRE DE BREVETS (PCT)

(19) Organisation Mondiale de la Propriété  
Intellectuelle  
Bureau international



(43) Date de la publication internationale  
13 décembre 2001 (13.12.2001)

PCT

(10) Numéro de publication internationale  
**WO 01/95159 A1**

(51) Classification internationale des brevets<sup>7</sup> :  
**G06F 17/50, 17/16**

(30) Données relatives à la priorité :  
00/07456 9 juin 2000 (09.06.2000) FR

(21) Numéro de la demande internationale :  
PCT/FR01/01715

(71) Déposant : **THALES** [FR/FR]; 173, boulevard Haussmann, F-75008 Paris (FR).

(22) Date de dépôt international : 1 juin 2001 (01.06.2001)

(72) Inventeurs; et

(75) Inventeurs/Déposants (pour US seulement) : **CHRISTIANSEN SNORRE, Harald** [FR/FR]; Thales Intellectual Property, 13, av. du Prés. Salvador Allende, F-94117 Arcueil Cédex (FR). **BEREUX, François** [FR/FR]; Thales Intellectual Property, 13, av. du Prés. Salvador Allende,

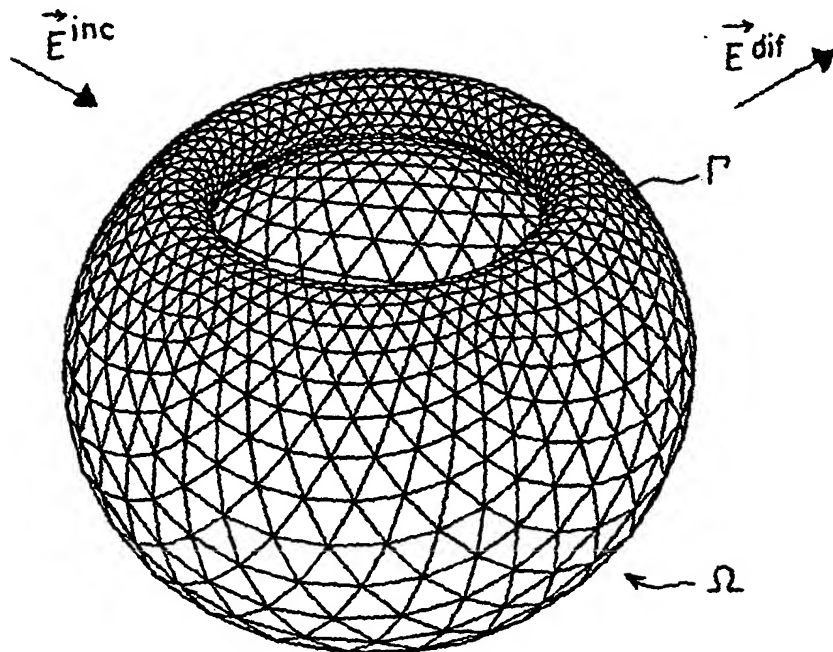
(25) Langue de dépôt : français

(26) Langue de publication : français

[Suite sur la page suivante]

(54) Title: ELECTROMAGNETIC SIMULATION ALGORITHM, IN PARTICULAR FOR AN ELECTROMAGNETIC ANTENNA PERFORMANCES

(54) Titre : ALGORITHME DE SIMULATION ELECTROMAGNETIQUE, NOTAMMENT DES PERFORMANCES D'UNE ANTENNE



(57) Abstract: The invention concerns an electromagnetic simulation algorithm, which enables to calculate the electromagnetic wave diffracted by a conductor operating in single-frequency. The invention concerns an electromagnetic simulation algorithm based on iterative resolution of a system of integral equations comprising a preconditioner. Said preconditioner is in particular derived from the adaptation of Calderon formulae to integral equations of the electromagnetic boundary, also known as Electric Field Integral Equation (EFIE). It further consists in using an original representation of the residue of the calculations at each iteration. Said representation, as well as a projection and a composition are involved in the expression of said precondition factor. The invention is in particular applicable to simulation instruments used for designing receiving and transmitting antennae such as antennae of cellular telephones, of anti-collision radar, of

electronic countermeasure system, of surveillance or tracking radar, or of satellite. The invention is also useful for calculating radar reflective area of objects whereof the geometrical properties are known.

(57) Abrégé : La présente invention se rapporte à un algorithme de simulation électromagnétique, qui permet de calculer l'onde électromagnétique diffractée par un conducteur en régime monofréquentiel. A cet effet, l'invention concerne un algorithme de simulation électromagnétique basé une résolution itérative d'un système d'équations intégrales comprenant un préconditionneur. Ce préconditionneur est notamment issu de l'adaptation des formules de Calderon aux équations intégrales

[Suite sur la page suivante]

WO 01/95159 A1



F-94117 Arcueil Cédex (FR). NEDELEC, Jean-Claude [FR/FR]; Thales Intellectual Property, 13, av. du Prés. Salvador Allende, F-94117 Arcueil Cédex (FR). MARTINAUD, Jean-Paul [FR/FR]; Thales Intellectual Property, 13, av. du Prés. Salvador Allende, F-94117 Arcueil Cédex (FR).

**Déclaration en vertu de la règle 4.17 :**

— *relative au droit du déposant de revendiquer la priorité de la demande antérieure (règle 4.17.iii) pour toutes les désignations*

(74) **Mandataire :** LUCAS, Laurent; Thales Intellectual Property, 13, av. du Prés. Salvador Allende, F-94117 Arcueil Cédex (FR).

**Publiée :**

— *avec rapport de recherche internationale*

(81) **État désigné (national) :** US.

(84) **États désignés (régional) :** brevet européen (AT, BE, CH, CY, DE, DK, ES, FI, FR, GB, GR, IE, IT, LU, MC, NL, PT, SE, TR).

*En ce qui concerne les codes à deux lettres et autres abréviations, se référer aux "Notes explicatives relatives aux codes et abréviations" figurant au début de chaque numéro ordinaire de la Gazette du PCT.*

de frontière de l'électromagnétisme, encore connues sous le nom de Electric Field Integral Equation (EFIE) dans la littérature anglo-saxonne. On utilise aussi une représentation originale du résidu des calculs lors de chaque itération. Cette représentation, ainsi qu'une projection et une composition interviennent dans l'expression dudit préconditionneur. Elle s'applique notamment aux outils de simulation utilisés lors de la conception d'antennes de réception ou d'émission telle que les antennes de téléphone cellulaire, de radar anti-collision, de système de contre mesure électronique (CME), de radar de veille ou de poursuite, ou de satellite. L'invention s'applique aussi au calcul des surfaces équivalentes radar (SER) d'objets dont on connaît les propriétés géométriques.

ALGORITHME DE SIMULATION ELECTROMAGNETIQUE,  
NOTAMMENT DES PERFORMANCES D'UNE ANTENNE.

La présente invention se rapporte à un algorithme de simulation électromagnétique, notamment des performances d'une antenne, qui permet de calculer l'onde électromagnétique diffractée par un conducteur en régime monofréquentiel. Elle s'applique notamment aux outils de simulation utilisés  
5 lors de la conception d'antennes de réception ou d'émission telle que les antennes de téléphone cellulaire, de radar anti-collision, de système de contre mesure électronique (CME), de radar de veille ou de poursuite, ou de satellite. L'invention s'applique aussi au calcul des surfaces équivalentes radar (SER) d'objets dont on connaît les propriétés géométriques.

10 On utilise les simulations d'antennes pour limiter le nombre de maquettes et de prototypes lors de la conception desdites antennes. Ces simulations permettent notamment de calculer le diagramme de rayonnement en champ lointain des antennes et d'adapter les antennes en émission ou en réception, en présence ou non d'une structure environnante.  
15 Elles utilisent comme donnée d'entrée un maillage de l'antenne dont on souhaite évaluer les performances, ainsi que les caractéristiques de l'excitation électromagnétique à laquelle elle est soumise. L'invention ne se limite pas aux simulations d'antennes. Elle s'applique aussi par exemple aux calculs de SER de cibles. On décrit maintenant, à titre d'illustration,  
20 l'application de l'invention dans les simulations d'antennes, en réception.

On distingue deux principales méthodes dans les simulations couramment employées. Une première méthode est basée sur le calcul par différences finies, encore connue sous le nom de méthode d'éléments finis de volume. Selon cette méthode, on utilise un maillage d'un volume  
25 entourant l'antenne. Un inconvénient de cette méthode est que le maillage est nécessairement borné, alors qu'on s'intéresse au diagramme de rayonnement à l'infini. On doit alors réaliser un compromis entre la dimension du volume maillé, c'est à dire la précision de calcul, et le temps de calcul. Pour pallier cet inconvénient, on utilise une seconde méthode basée sur des  
30 équations intégrales dans le domaine fréquentiel. Selon cette méthode, on utilise un maillage en surface de l'antenne uniquement. On calcule directement le diagramme de rayonnement à l'infini à partir de courants électriques et magnétiques sur la surface de l'antenne.

Certaines techniques connues utilisant les équations intégrales  
35 calculent les courants électriques et magnétiques (desquels on déduit le

diagramme de champ rayonné à l'infini) grâce à une factorisation d'une matrice. Cette matrice est connue sous le nom de matrice d'interaction ou encore matrice d'impédance. Cette factorisation permet un calcul direct, c'est à dire non itératif des courants de surface. Un inconvénient de ces techniques est que le temps de calcul est long. Si on note  $N$  le nombre de points intervenant dans le maillage de l'antenne (encore appelé triangulation de surface), le temps de calcul selon ces techniques varie comme  $N^3$ . Or le nombre de points  $N$  est lui-même lié à la longueur d'onde (et par conséquent la fréquence) de l'onde rayonnée par l'antenne. Supposons que l'on réalise une simulation à 10GHz, en utilisant  $N$  points dans le maillage de l'antenne, et que le temps de calcul est  $\tau$ . Pour transposer cette simulation à 20GHz, il sera nécessaire d'utiliser un maillage comportant  $4 \times N$  points, ce qui représentera un temps de calcul de l'ordre de  $4^3 \times \tau$ . Un problème de temps de calcul se pose aussi lorsqu'on cherche à simuler des géométries complexes d'antennes, telles que les réseaux de petites tailles. Ceci rend ces techniques inutilisables notamment dans les outils de conception qui requièrent un temps de calcul réduit pour permettre aux concepteurs de réaliser plusieurs tests.

D'autres techniques connues utilisant les équations intégrales permettent de diminuer le temps de calcul grâce à une méthode de résolution itérative. Si on note  $IT$  le nombre d'itérations, le temps de calcul selon ces techniques varie comme  $IT \times N^2$ . Un problème de ces techniques est que rien ne garantit la convergence des calculs. En d'autres termes, il existe des formes d'antennes pour lesquelles on ne peut pas calculer le diagramme de champ rayonné avec ces techniques.

Un but de l'invention est de pallier les inconvénients précités, et notamment de réduire les temps de calcul.

A cet effet, l'invention concerne un algorithme de simulation des performances d'une antenne basé sur une résolution itérative d'un système d'équations intégrales comprenant un préconditionneur. Ce préconditionneur est notamment issu de l'adaptation des formules de Calderon aux équations intégrales de frontière de l'électromagnétisme. En particulier dans le cas d'une antenne entièrement métallique, on propose un préconditionneur pour l'équation appelée « Electric Field Integral Equation » (EFIE) dans la littérature anglo-saxonne. On utilise aussi une représentation originale du

résidu des calculs lors de chaque itération. Cette représentation, ainsi qu'une projection et une composition interviennent dans l'expression dudit préconditionneur.

L'invention a les principaux avantages suivants :

- 5   ▪ elle converge rapidement ;
- elle permet de simuler des géométries arbitraires et des excitations quelconques ;
- son conditionnement est indépendant de la finesse du maillage ;
- elle s'adapte aux algorithmes basés sur le calcul d'une matrice
- 10   d'impédance, en réutilisant ladite matrice d'impédance ;
- elle permet de traiter des antennes comportant, en plus du métal, des matériaux diélectriques.

D'autres caractéristiques et avantages de l'invention apparaîtront plus clairement dans la description qui va suivre et dans les figures annexées

15 qui représentent :

- la figure 1, un maillage d'une antenne ;
- la figure 2, une vue en coupe du maillage de la figure 1 ;
- la figure 3, un détail du maillage de la figure 1 sur lequel est
- représenté un champ de vecteurs ;
- 20   - la figure 4, un diagramme fonctionnel d'un algorithme itératif ;
- la figure 5, une fonction de base constante par triangles sur un maillage ;
- la figure 6, une fonction de base affine par triangles et continue sur un maillage ;
- 25   - les figures 7 et 8, deux illustrations des performances de l'algorithme selon l'invention comparé aux techniques connues.

On se réfère maintenant aux figures 1 et 2 qui représentent un exemple de forme d'antenne dont on cherche à déterminer le champ diffracté

30 lorsque l'antenne est éclairée par une onde incidente. En d'autres termes, on cherche à simuler une antenne en réception. L'antenne prise dans cet exemple est une cavité sphérique de demi-angle d'ouverture  $\pi/4$ . Le rayon intérieur est  $7/8$ , le rayon extérieur est  $9/8$  (unité de longueur arbitraire). La surface de l'antenne est notée  $\Gamma$ . Cette surface  $\Gamma$  est maillée par des

triangles. La surface  $\Gamma$  est supposée être celle d'un conducteur parfait (l'antenne)  $\Omega^-$  plongé dans le vide  $\Omega^+$ .

Dans cet exemple, l'onde électromagnétique incidente qui illumine l'antenne est une onde plane monofréquentielle. Cette onde  
 5 électromagnétique incidente, de nombre d'onde  $k^{inc}$  connu, est représentée par deux champs de vecteurs notés  $\vec{E}^{inc}$  et  $\vec{H}^{inc}$  correspondant respectivement aux champ électrique et au champ magnétique. Bien entendu, l'invention ne s'applique pas aux seulement aux ondes planes. Il est possible de substituer cette onde incidente par le champ émis par un dipôle  
 10 rayonnant par exemple (mode émetteur de l'antenne).

On cherche à déterminer l'onde électromagnétique diffractée par l'antenne à l'infini, c'est à dire le diagramme de rayonnement en champ lointain. Cette onde électromagnétique diffractée est représentée par deux  
 15 champs de vecteurs notés  $\vec{E}^{dif}$  et  $\vec{H}^{dif}$  correspondant respectivement aux champ électrique et au champ magnétique.

A partir du champ de courant circulant à la surface de ladite antenne, encore appelé courants électriques et magnétiques de surface, il est possible de calculer le champ électromagnétique rayonné en tout point de l'espace. L'expression asymptotique à l'infini du champ électromagnétique  
 20 rayonné est le diagramme de rayonnement que l'on cherche à déterminer. Ce calcul bien connu en électromagnétisme est rappelé dans le document « *Integral Equation Methods In Scattering Theory* » de D. Colton et R. Kress - John Wiley & Sons, New-York, 1983.

Le champ électromagnétique satisfait les équations de Maxwell  
 25 dans le vide  $\Omega^+$  qui s'écrivent :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = i\omega\mu\vec{H} \quad (1)$$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{H}) = -i\omega\epsilon\vec{E} \quad (2)$$

30

Les termes utilisés dans ces équations représentent :

- $\overline{\text{rot}}$  l'opérateur rotationnel ;
- $\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^{dif}$  le champ électrique total en notation complexe ;
- $\vec{H} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^{dif}$  le champ magnétique total en notation complexe ;
- 35 ▪  $i = \sqrt{-1}$  ;

- $\omega$  la pulsation de l'onde électromagnétique ;
- $\mu$  la perméabilité magnétique ;
- $\varepsilon$  la permittivité électrique.

On rappelle que le nombre d'onde est relié à la pulsation  
5 simplement par la relation suivante :

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (3)$$

Le champ électrique de l'onde électromagnétique diffractée  
10  $\vec{E}^{\text{dif}}$  s'exprime en tout point B de  $\Omega^+$  à partir des courants de surface notés  $\vec{u}$  par les relations suivantes :

$$\vec{E}^{\text{dif}}(B) = k \int_{A \in \Gamma} G_k(A, B) \vec{u}(A) dS_A + \frac{1}{k} \overrightarrow{\text{grad}}_B \left( \int_{A \in \Gamma} G_k(A, B) \text{div}_A(\vec{u}) dS_A \right) \quad (4)$$

$$15 \quad G_k(A, B) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikAB}}{AB} \quad (5)$$

Les termes des relations (4) et (5) représentent :

- $\text{div}_A(\vec{u})$  la divergence prise en un point A du champ de vecteur  $\vec{u}$  ;
- $\overrightarrow{\text{grad}}_B$  le gradient pris en un point B ;
- 20 ▪  $dS_A$  un élément différentiel de surface ;
- $G_k$  la fonction de Green standard ;
- $AB$  la distance entre les points A et B ;
- $k$  la norme du nombre d'onde défini par la relation (3).

L'homme de l'art pourra aller chercher d'autres éléments  
25 techniques relatifs à ce calcul dans le document susmentionné dans la mesure où celui-ci fait partie intégrante de la description.

Le calcul des courants de surface, c'est à dire du champ de vecteurs  $\vec{u}$ , est déterminé à partir de l'équation variationnelle suivante :

$$30 \quad \forall \vec{v} \quad m(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}) \quad (6)$$

dans laquelle

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = k \iint_{\substack{A \in \Gamma \\ B \in \Gamma}} G_k(A, B) \vec{u}(A) \cdot \vec{v}(B) dS_A dS_B \\ - \frac{1}{k} \iint_{\substack{A \in \Gamma \\ B \in \Gamma}} G_k(A, B) \operatorname{div}_A(\vec{u}) \operatorname{div}_B(\vec{v}) dS_A dS_B \quad (7)$$

5

et

$$l(\vec{v}) = - \int_{A \in \Gamma} \vec{E}^{\text{inc}}(A) \cdot \vec{v}(A) dS_A \quad (8)$$

10 Cette équation variationnelle (6) est connue sous le nom de d'équation intégrale de frontière de l'électromagnétisme, ou encore « Electric Field Integral Equation » (EFIE) dans la littérature anglo-saxonne.

Afin de résoudre cette équation variationnelle (6) dans une  
 15 simulation numérique d'antenne, on doit approcher la solution  $\vec{u}$  dans un espace de dimension finie, dit espace de discrétisation. Cet espace contient des champs de vecteurs qui représentent des courants de surface. La dimension cet espace est le nombre de composantes nécessaires pour décrire entièrement ledit champ de vecteurs, en tout point de la surface  $\Gamma$ .  
 20 Cette surface étant maillée, le nombre de composantes servant à décrire  $\vec{u}$  sera fonction notamment du nombre de points du maillage  $N$ , ainsi que de la nature des fonctions de base servant à décrire le champ de vecteurs (par exemple des fonctions linéaires ou de degré 2). Dans la suite de la description, on prendra à titre d'illustration l'espace de Raviart-Thomas de  
 25 plus bas degré sur le maillage de  $\Gamma$ . Cet espace de discrétisation, qui représente des courants de surface, est noté  $D_h$ . Le symbole  $h$  représente la longueur caractéristique, ou encore précision, du maillage. En effet, le nombre de dimension de cet espace  $D_h$  dépend du nombre de point  $N$  du maillage, qui lui-même dépend de la précision  $h$  du maillage.

30



On se réfère maintenant à la figure 3 pour décrire une base de l'espace Dh. Dans cette base, le champ de courants de surface  $\vec{U}$  est représenté par les coefficients d'un vecteur noté U.

La base de l'espace des courants de surface contient des  
 5 éléments notés  $\vec{\varphi}_i$  où i est un indice entier associé à une arête du maillage de la surface  $\Gamma$ . Ces éléments sont des champs de vecteurs définis sur le maillage de la surface  $\Gamma$ . Le champ de vecteurs  $\vec{\varphi}_i$ , représenté par des  
 10 flèches sur la figure 3, a un support borné à deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  du maillage. Ces triangles  $T_1$  et  $T_2$  ont en commun l'arête d'indice i et de longueur  $\ell_i$ . Cette arête est orientée par un vecteur de norme unitaire noté  $\vec{y}_i$ . On note  $P_1$  le sommet du triangle  $T_1$  non contenu sur l'arête i ; on note  $P_2$  le sommet du triangle  $T_2$  non contenu sur l'arête i. On note  $S_1$  et  $S_2$  les surfaces des triangles  $T_1$  et  $T_2$ . Soient  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  les vecteurs de norme  
 15 unitaire, ayant une direction normale à la surface des triangles  $T_1$  et  $T_2$ , et orientés de l'intérieur  $\Omega^-$  vers l'extérieur  $\Omega^+$ . On définit les vecteurs  $\vec{x}_1^i$  et  $\vec{x}_2^i$  les vecteurs de normes unitaires tels que le triplet  $(\vec{x}_1^i; \vec{y}_i; \vec{z}_1)$  et le triplet  $(\vec{x}_2^i; \vec{y}_i; \vec{z}_2)$  soient des trièdres directs. On définit le champ de vecteurs  $\vec{\varphi}_i$  pour tout point A appartenant à la surface  $\Gamma$  avec les relations suivantes :

$$20 \quad \bullet \text{ si } A \in T_1, \vec{\varphi}_i(A) = \pm \frac{\ell_i}{S_1} \overrightarrow{P_1 A} \text{ avec } \vec{\varphi}_i(A) \cdot \vec{x}_1^i > 0; \quad (9)$$

$$\bullet \text{ si } A \in T_2, \vec{\varphi}_i(A) = \pm \frac{\ell_i}{S_2} \overrightarrow{P_2 A} \text{ avec } \vec{\varphi}_i(A) \cdot \vec{x}_2^i > 0; \quad (10)$$

$$\bullet \text{ sinon, } \vec{\varphi}_i(A) = \vec{0}. \quad (11)$$

Une telle base de l'espace des courants est connue sous le nom  
 25 de base usuelle de l'espace Raviart-Thomas ou encore courants élémentaires de Rao-Wilton-Glisson. L'homme de l'art pourra aller chercher d'autres éléments techniques dans « *Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape* » de S.S.M. Rao, D.R. Wilton et A.W. Glisson - IEEE Trans. Ant. Prop. AP-30, pp. 409-418, 1982 - dans la mesure où ce  
 30 document fait partie intégrante de la description.

On note  $U_i$  les coefficients du vecteur  $U$ . Le champ de vecteurs  $\vec{u}(A)$  utilisé dans la relation (4) se décompose sur la base usuelle de l'espace de Raviart-Thomas de la manière suivante :

$$\vec{u}(A) = \sum_i U_i \vec{\varphi}_i(A) \quad (12)$$

On transpose maintenant en notations matricielles les relations (6), (7) et (8) en utilisant la base  $(\vec{\varphi}_i)$  décrite ci-dessus. L'équation variationnelle (6) s'écrit sous la forme du système d'équations linéaires suivant :

$$M U = L \quad (13)$$

Les termes de la relation (13) sont les suivants :

- $M$  est une matrice connue, dite matrice d'interaction ou encore matrice d'impédance ;
- $L$  est un vecteur connu, dont les coefficients représentent l'onde incidente, c'est à dire l'excitation électromagnétique ;
- $U$  est le vecteur que l'on cherche à déterminer, dont les coefficients représentent les courants de surface.

On définit les coefficients  $M_{ij}$  de la matrice d'interaction  $M$  et les coefficients  $L_i$  du vecteur  $L$  représentant l'onde incidente par les relations suivantes :

$$M_{ij} = k \iint_{\substack{A \in \Gamma \\ B \in \Gamma}} G_k(A, B) (\vec{\varphi}_i(A) \cdot \vec{\varphi}_j(B)) dS_A dS_B \\ - \frac{1}{k} \iint_{\substack{A \in \Gamma \\ B \in \Gamma}} G_k(A, B) \operatorname{div}_A (\vec{\varphi}_i) \operatorname{div}_B (\vec{\varphi}_j) dS_A dS_B \quad (14)$$

$$L_i = \int_{A \in \Gamma} (\vec{E}^{\text{inc}}(A) \cdot \vec{\varphi}_i(A)) dS_A \quad (15)$$

L'homme de l'art pourra aller chercher d'autres éléments techniques relatifs au calcul de ces coefficients dans « *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques* » de A. Bendali – Thèse de l'Université Paris VI, 1984 -  
5 dans la mesure où ce document fait partie intégrante de la description.

On se réfère maintenant à la figure 4 où est illustré un algorithme itératif de résolution du système d'équations linéaires (13) basé sur la  
10 technique de gradient conjugué. Il est à noter que la technique de préconditionnement que nous illustrons dans le cas de l'algorithme du gradient conjugué s'applique aussi bien d'autres algorithmes itératifs. On peut citer notamment les algorithmes du Résidu Minimum Généralisé, Gradient Bi-Conjugué, Résidu Quasi-Minimum et du Gradient Bi-Conjugué  
15 Stabilisé encore connus dans la littérature anglo-saxonne sous les noms de « Generalized Minimum Residual » (GMRES), « BiConjugate Gradient » (BiCG), « Quasi-Minimal Residual » (QMR), et « BiConjugate Gradient Stabilized » (Bi-CGSTAB). L'homme de l'art pourra aller chercher d'autres éléments techniques sur les méthodes itératives dans « *Templates for the*  
20 *Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods* » de R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozzi, C. Romine et H. Van der Vorst – SIAM (1994), Philadelphia, PA - dans la mesure où ce document fait partie intégrante de la description.

La figure 4 illustre un algorithme 40 qui prend en entrée la matrice  
25 M et le vecteur L de l'équation (13) et donne en sortie le vecteur U. L'homme de l'art pourra aller chercher d'autres éléments techniques relatifs à la résolution de systèmes d'équations linéaires dans « *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations* » de C.T. Kelley – SIAM Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia, 1995 - dans la mesure où ce document fait partie  
30 intégrante de la description.

Une première étape d'initialisation 41 permet d'initialiser quatre suites de vecteurs notés  $U[n]$ ,  $R[n]$ ,  $S[n]$  et  $P[n]$  où  $n$  est un entier. La première suite  $U[n]$  est une solution approchée qui converge vers la solution recherchée  $U$ . La seconde suite  $R[n]$ , connue sous le nom de résidu,  
35 converge vers le vecteur nul. La troisième suite  $S[n]$ , que l'on nomme résidu

préconditionné, converge aussi vers le vecteur nul. La dernière suite  $P[n]$  est connue sous le nom de direction de recherche. Les premières valeurs de ces suites sont définies par les relations suivantes :

$$5 \quad U[0] = 0 \quad (16)$$

$$R[0] = L - M U[0] \quad (17)$$

$$S[0] = Z R[0] \quad (18)$$

$$10 \quad P[0] = S[0] \quad (19)$$

La relation (16) est utilisée par défaut lorsqu'on ne connaît pas de solution approchée. Une variante de cette relation consiste à prendre pour  
 15  $U[0]$  le résultat d'un calcul de courant de surface réalisé pour une même antenne mais à une autre fréquence.

Le terme  $Z$  de la relation (18) est une matrice. Cette matrice est un préconditionneur pour la matrice  $M$  selon l'invention. On rappelle qu'un préconditionneur pour  $M$  est une matrice approchant l'inverse de  $M$ . Selon  
 20 une variante, on peut remplacer le préconditionneur  $Z$  par l'identité. En d'autres termes, on peut initialiser  $S[0]$  avec  $R[0]$ .

Une seconde étape d'itération 42 permet de calculer les valeurs des suites précitées à un rang  $n+1$  à partir des termes de rang  $n$ . Cette étape d'itération utilise les relations suivantes :

$$25 \quad U[n+1] = U[n] + \alpha P[n] \quad (20)$$

$$R[n+1] = R[n] - \alpha M P[n] \quad (21)$$

$$30 \quad S[n+1] = Z R[n+1] \quad (22)$$

$$P[n+1] = S[n+1] + \frac{\langle R[n+1], S[n+1] \rangle}{\langle R[n], S[n] \rangle} P[n] \quad (23)$$

avec

$$\alpha = \frac{\langle R[n], S[n] \rangle}{\langle M P[n], P[n] \rangle} \quad (24)$$

où  $\langle \quad , \quad \rangle$  représente le produit scalaire complexe en notation  
5 matricielle.

Une dernière étape 43 réalise un test de convergence. Ce test peut s'exprimer par exemple par l'inégalité suivante :

$$\frac{\| R[n] \|}{\| R[0] \|} \leq \eta \quad (25)$$

10

où  $\eta$  est un seuil prédéterminé. En d'autres termes, on compare le résidu préconditionné normalisé par rapport au un seuil prédéterminé  $\eta$ . Lorsque l'inégalité (25) est vérifiée, le calcul s'achève et on prend  $U = U[n]$  comme solution. Dans le cas contraire, on incrémente la valeur de  $n$  et on  
15 retourne à l'étape 42.

Bien entendu, il est possible d'utiliser un autre test de convergence pour arrêter les itérations. On peut par exemple remplacer l'inégalité (25) par l'inégalité suivante :

$$\frac{\| S[n] \|}{\| S[0] \|} \leq \eta \quad (26)$$

20

L'algorithme du gradient conjugué dans les techniques actuelles est utilisé sans préconditionneur, c'est à dire avec la matrice  $Z$  égale à l'identité.

25

L'invention consiste à utiliser un préconditionneur basé sur une généralisation d'une formule de Calderon. L'homme de l'art pourra aller chercher des éléments techniques sur cette formule de Calderon dans « *Mathematical Methods in Electromagnetism, Linear Theory and Applications* » de M. Cessenat – World Scientific Publishing Co., page 89,  
30 1996 - dans la mesure où ce document fait partie intégrante de la description. Cette formule s'écrit :

$$\mathcal{J} \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} + \mathcal{J} \mathcal{R} \mathcal{J} \mathcal{R} = \frac{1}{4} I \quad (27)$$

Dans cette relation (27),  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$  sont trois opérateurs sur les  
 5 champs de vecteurs tangents, c'est à dire des applications qui à un champ  
 de vecteurs tangents associent un autre champ de vecteurs tangents, et  $I$   
 est l'application identité.  $\mathcal{J}$  est l'opérateur de produit scalaire avec la normale  
 à la surface de l'antenne, et  $\mathcal{M}$  est l'opérateur associé à la matrice  
 d'interaction dont on cherche un préconditionneur. Les opérateurs  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$   
 10 sont définis formellement par les relations suivantes :

$$(\mathcal{M} \bar{u})(B) = \left[ k \int_{A \in \Gamma} G_k(A, B) \bar{u}(A) dS_A \right. \\ \left. + \frac{1}{k} \overline{\text{grad}}_B \left( \int_{A \in \Gamma} G_k(A, B) \text{div}_A(\bar{u}) dS_A \right) \right]_t \quad (28)$$

$$(\mathcal{J} \bar{u})(B) = \bar{u}(B) \wedge \bar{z}(B) \quad (29)$$

$$(\mathcal{R} \bar{u})(B) = \int_{A \in \Gamma} \overline{\text{grad}}_B(G_k(A, B)) \wedge \bar{u}(A) dS_A \quad (30)$$

20 Dans les relations (28), (29) et (30),  $\mathcal{M} \bar{u}$ ,  $\mathcal{J} \bar{u}$ ,  $\mathcal{R} \bar{u}$  et  $\bar{u}$  sont des  
 champs de vecteurs tangents. L'indice t de la relation (28) représente la  
 composante tangentielle du vecteur entre crochets. B est un point de la  
 surface  $\Gamma$ .  $\bar{z}(B)$  est un vecteur unitaire, normal à la surface  $\Gamma$  en B orienté  
 25 vers l'extérieur.

La Demanderesse a constaté que l'opérateur  $\mathcal{J} \mathcal{R} \mathcal{J} \mathcal{R}$  étant  
 compact, c'est à dire négligeable, l'opérateur  $4 \mathcal{J} \mathcal{M} \mathcal{J}$  est  
 approximativement un inverse de l'opérateur  $\mathcal{M}$ . Ensuite, les  
 préconditionneur étant définis à une constante multiplicative près, il est  
 30 possible d'éliminer la constante 4. Sachant que  $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$ , le préconditionneur  
 selon l'invention est défini à partir de  $\mathcal{J}^* \mathcal{M} \mathcal{J}$ . On rappelle que  $\mathcal{J}^*$  est  
 l'opérateur adjoint de  $\mathcal{J}$ , c'est à dire l'opérateur vérifiant la relation suivante :

$$\int \mathcal{J}^* \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \int \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathcal{J} \bar{\mathbf{v}} \quad (31)$$

Le préconditionneur selon invention est une traduction matricielle de l'opérateur  $\mathcal{J}^* \mathcal{M} \mathcal{J}$ . C'est dans cette traduction matricielle qu'apparaît l'avantage d'utiliser l'opérateur  $\mathcal{J}^* \mathcal{M} \mathcal{J}$  plutôt que l'opérateur  $\mathcal{J} \mathcal{M} \mathcal{J}$ . En effet, la traduction matricielle  $Z$  de l'opérateur  $\mathcal{J}^* \mathcal{M} \mathcal{J}$  est une matrice symétrique, ce qui est essentiel pour les algorithmes itératifs, tel que le gradient conjugué.

On décrit maintenant un exemple de préconditionneur selon l'invention qui permet d'accélérer la convergence de l'algorithme et aussi de rendre cet algorithme plus stable (on converge toujours vers la solution quelles que soient les conditions initiales). Ce préconditionneur est adapté aux problèmes électromagnétiques et tire parti de la structure du problème à résoudre.

On définit d'abord des espaces et leurs bases associées qui serviront dans la suite de la description. On a déjà défini la base  $(\vec{\varphi}_i)$ . L'espace engendré par cette base,  $D_h$ , est un espace de champs de vecteurs tangents. En d'autres termes,  $D_h$  est un ensemble de fonctions qui à tout point de  $\Gamma$  associent un vecteur tangent à la surface maillée  $\Gamma$ . On définit aussi deux espaces de fonctions  $Ch$  et  $Sh$ . Les fonctions de ces espaces associent une valeur scalaire à chaque point de  $\Gamma$ .

$Ch$  est l'ensemble des fonctions constantes par triangles, c'est à dire dont la valeur est constante pour tout point appartenant à un triangle donné. La base de  $Ch$  que l'on utilise par la suite est l'ensemble des fonctions notées  $\psi_i$ , qui valent 1 sur le triangle d'indice  $i$  et 0 en dehors. On se réfère à la figure 5 sur laquelle est représentée une fonction de base  $\psi_i$ . On a représenté par souci de clarté un maillage 50 plan et régulier. Les valeurs de la fonction  $\psi_i$  sont représentées sur un axe 51, perpendiculaire au maillage 50. La fonction  $\psi_i$  représentée sur cette figure vaut 1 sur le triangle  $i$  et 0 en dehors.

$Sh$  est l'ensemble des fonctions affines par triangles et continues. Ces fonctions ont un gradient constant sur tout triangle donné. La base de  $Sh$  que l'on utilise par la suite est l'ensemble des fonctions notées  $\theta_i$ , qui valent 1 au nœud d'indice  $i$  et 0 sur les autres nœuds. On se réfère à la

figure 6 sur laquelle est représentée une fonction de base  $\theta_i$ . On a représenté par soucis de clarté un maillage 60 plan et régulier. Les valeurs de la fonction  $\theta_i$  sont représentées sur un axe 61, perpendiculaire au maillage 60. La fonction  $\theta_i$  représentée sur cette figure est affine par triangles, et vaut 1 au nœud i. Cette fonction a un support (des valeurs non nulles) borné aux triangles 62, 63, 64, 65, 66, 67 qui ont un sommet confondu avec le nœud i.

L'homme de l'art pourra aller chercher des éléments techniques complémentaires dans « *Handbook of Numerical Analysis Vol. II, Finite Elements Methods (Part 1)* » de P. G. Ciarlet – Ed. J.L. Lions, North-Holland, 1991 - dans la mesure où ce document fait partie intégrante de la description.

On définit maintenant des matrices qui serviront dans la suite de la description du préconditionneur. Ces matrices sont basées sur les bases définies ci-avant. Elles s'expriment par les relations suivantes :

$$M1_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \bar{\varphi}_i(A) \cdot \bar{\varphi}_j(A) dS_A \quad (32)$$

$$M2_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \psi_j(A) \operatorname{div}_A(\bar{\varphi}_i) dS_A \quad (33)$$

$$M3_{ij} = \int_{A \in \Gamma} (\bar{\varphi}_j(A) \wedge \bar{z}(A)) \cdot \bar{\varphi}_i(A) dS_A \quad (34)$$

où  $\bar{z}(A)$  est un vecteur de norme unitaire, normal à la surface  $\Gamma$  au point A, et orienté vers l'extérieur.

$$M4_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \psi_j(A) \theta_i(A) dS_A \quad (35)$$

$$M5_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \theta_j(A) \theta_i(A) dS_A \quad (36)$$

$$M6_{ij} = \left( \overrightarrow{\operatorname{rot}(\theta_j)} \right)_{\varphi_i} \quad (37)$$



On décrit maintenant les étapes qui permettent de calculer le résidu préconditionné à partir du résidu dans les relations (18) et (22). Ces relations utilisent le préconditionneur Z que l'on décrit maintenant. Dans la description qui va suivre, on donne une décomposition de cette matrice Z en  
 5 produit de matrices. Les matrices intervenant dans ce produit sont des matrices creuses ou des inverses de matrices creuses. Ainsi, selon une variante avantageuse de l'invention, on utilisera préférentiellement les matrices creuses plutôt que directement la matrice Z, ce qui permet notamment de réduire la mémoire utilisée et le temps de calcul.

10 On note maintenant R le résidu, et S le résidu préconditionné. R correspond respectivement à R[0] et à R[n+1] dans les relations (18) et (22). S correspond respectivement à S[0] et à S[n+1] dans les relations (18) et (22).

Une première étape consiste à utiliser une représentation mixte.  
 15 Cette étape sera mieux comprise à l'aide des notations vectorielles qui seront ensuite transposées en notations matricielles. Le résidu R correspond à une forme bilinéaire sur l'espace Dh défini ci-avant. On note  $\rho$  cette forme bilinéaire. On représente  $\rho$  par un champ de vecteurs  $\vec{r1}$  dans Dh de divergence nulle et une fonction q1 dans Ch d'intégrale nulle. Le champ  $\vec{r1}$   
 20 et la fonction q1 sont définis par la relation suivante pour tout champ de vecteurs  $\vec{V}$  dans Dh :

$$\int_{A \in \Gamma} \vec{r1}(A) \cdot \vec{V}(A) dS_A + \int_{A \in \Gamma} q1(A) \operatorname{div}_A(\vec{V}) dS_A = \rho(\vec{V}) \quad (38)$$

25 Le champ de vecteurs  $\vec{r1}$  ayant une divergence nulle, on peut écrire pour toute fonction f dans Ch et d'intégrale nulle :

$$\int_{A \in \Gamma} f(A) \operatorname{div}_A(\vec{r1}) dS_A = 0 \quad (39)$$

30 Dans la suite, pour ne pas compliquer inutilement la présentation, on ne rappelle pas que les champs scalaires considérés sont d'intégrale nulle.

Les relations (38) et (39) se transposent de façon matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} M1 & M2 \\ {}^tM2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R1 \\ Q1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

5

Dans la relation (40), on a utilisé une notation matricielle par blocs, dans laquelle :

- ${}^tM2$  est la matrice transposée de  $M2$  ;
- 0 est un bloc nul (vecteur ou matrice) ;
- 10 ▪  $R1$  est la représentation matricielle de  $\bar{r}1$  ;
- $Q1$  est la représentation matricielle de  $q1$ .

On rappelle qu'il n'est pas nécessaire d'inverser la matrice définie par blocs pour déterminer  $R1$  et  $Q1$  à partir de  $R$ . En effet, cette matrice est une matrice creuse, c'est à dire qui contient beaucoup de termes nuls. La  
15 résolution d'un tel système est bien connue de l'homme du métier. Elle est rappelée dans « *Handbook of Numerical Analysis Vol. II, Mixed and hybrid methods* » pp 523-640 de J.E. Roberts et J.-M. Thomas – Ed. J.L. Lions, North-Holland, 1991. Ce document fait partie intégrante de la description.

Une seconde étape consiste à projeter  $\bar{r}1$  et  $q1$ . Ces projections  
20 se traduisent en notations vectorielles par les relations suivantes :

$$\bar{r}2 = \wp_{Dh}(\bar{r}1 \wedge \bar{z}) \quad (41)$$

$$q2 = \wp_{Sh}(q1) \quad (42)$$

25

où :

- $\wp_{Dh}$  est l'opérateur de projection dans  $Dh$  ;
- $\wp_{Sh}$  est l'opérateur de projection dans  $Sh$  ;
- $\bar{z}$  est un vecteur unitaire, normal à  $\Gamma$  et orienté vers l'extérieur.

30

Ces projections définies par les relations (41) et (42) se traduisent de façon matricielle par :

$$\begin{pmatrix} M1 & 0 \\ 0 & M5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R2 \\ Q2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M3 R1 \\ M4 Q1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

La résolution de la relation (43) est similaire à la résolution de la relation (40) dans la mesure où les matrices M1 et M5 sont des matrices creuses. On peut noter que cette résolution est encore plus facile que celle de la relation (40) dans la mesure où les matrices M1 et M5 sont de plus symétriques, définies positives et bien conditionnées. On détermine ainsi R2 et Q2 à partir de R1 et Q1.

Une troisième étape consiste à combiner  $\overline{r2}$  et q2 en utilisant la relation suivante :

$$\overline{r3} = \overline{r2} - \overline{\text{rot}}(q2) \quad (44)$$

Cette troisième étape se traduit de façon matricielle par :

$$R3 = R2 - M6 Q2 \quad (45)$$

On appelle j l'application vectorielle qui résulte de la composition des trois étapes décrites ci-avant. Cette application est définie par :

$$j(\overline{r}) = \overline{r3} \quad (46)$$

Cette relation (46) se transpose en notations matricielles par :

$$J R = R3 \quad (47)$$

où on note J la matrice correspondant à l'application vectorielle j, la matrice J étant définie par le produit suivant :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -M6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M1 & 0 \\ 0 & M5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M3 & 0 \\ 0 & M4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M1 & M2 \\ {}^t M2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Il n'est bien entendu pas nécessaire de calculer directement J, car la décomposition (48) en produit de matrices creuses et d'inverses de matrices creuses est plus simple à utiliser. En d'autres termes, la matrice J est calculée de manière implicite lors de son utilisation.

5

On note z l'application vectorielle qui correspond à la matrice du préconditionneur Z. Le préconditionneur z est défini à partir de l'application vectorielle j par :

$$10 \quad z = j^* \circ \hat{m} \circ j \quad (49)$$

où :

- $j^*$  est l'adjoint de j ;
- $\circ$  est l'opérateur de composition d'applications ;
- 15 ▪  $\hat{m}$  est l'application linéaire  $Dh \rightarrow Dh^*$  associée à la forme bilinéaire m.

La relation (42) se traduit de façon matricielle par :

$$20 \quad Z = {}^t J M J \quad (50)$$

20

On se réfère maintenant aux figures 7 et 8 sur lesquelles sont illustrées les performances d'un algorithme avec un préconditionneur selon l'invention par rapport aux techniques connues n'utilisant pas de préconditionneur.

25

Sur la figure 7, la courbe 70 représente la fonction  $n \mapsto \log_{10} \left( \frac{\|S[n]\|}{\|S[0]\|} \right)$  en l'absence de préconditionneur. La courbe 71

représente la fonction  $n \mapsto \log_{10} \left( \frac{\|S[n]\|}{\|S[0]\|} \right)$  en présence du préconditionneur

décrit ci-dessus.

30 Sur la figure 8, la courbe 80 représente la fonction  $n \mapsto \log_{10} \left( \frac{\|R[n]\|}{\|R[0]\|} \right)$  en l'absence d'un préconditionneur. La courbe 81

représente la fonction  $n \mapsto \log_{10} \left( \frac{\|R[n]\|}{\|R[0]\|} \right)$  en présence du préconditionneur décrit ci-dessus.

On constate que si on prend un critère de convergence classique  $\eta = 10^{-4}$  dans la relation (25), 50 itérations suffisent avec le préconditionneur. Avec un algorithme non préconditionné, on n'atteint pas une précision suffisante en 200 itérations.

Ces simulations numériques ont permis de montrer que l'utilisation d'un préconditionneur selon l'invention permet d'accélérer et de stabiliser les algorithmes itératifs.

Bien entendu, l'invention ne se limite pas à l'exemple utilisé pour la décrire. Il est possible notamment d'utiliser d'autres fonctions de base ou un maillage différent de ceux pris en exemple.

L'invention se généralise à tout autre discrétisation de l'espace Dh. Si on prend pour Dh un espace différent de l'espace de Raviart-Thomas, on remplace les espaces Ch et Sh respectivement par :

$$Ch = \{\text{div}(\vec{u}) \mid \vec{u} \in Dh\} + 1 \quad (51)$$

$$Sh = \{\vec{p} \mid \overline{\text{rot}}(\vec{p}) \in Dh\} \quad (52)$$

20

En d'autres termes,

- Ch est un espace d'éléments finis minimal tel que la divergence des éléments de Dh soit comprise dans Ch ;
- Sh est un espace d'éléments finis maximal tel que le rotationnel des éléments de Sh soit compris dans Dh.

25

Une application principale de l'invention se trouve dans les outils de conception d'antenne, mais l'invention ne se limite pas à cette seule application. L'invention s'applique bien entendu aussi à tout outil de simulation basé sur le calcul du champ rayonné par un conducteur. On peut citer notamment le calcul de surfaces équivalentes radar (SER) d'objets dont on connaît les propriétés géométriques.

30

Il est à noter aussi que la technique de préconditionnement décrite dans les cas d'une méthode itérative s'applique aussi à d'autres méthodes numériques rapides. Ces méthodes rapides sont basées sur une résolution itérative, mais seuls les termes utiles aux produits matrice-vecteur sont  
5 calculés. Ainsi, on calcule de l'ordre de  $N \times \log(N)$  éléments de la matrice d'impédance, au lieu de  $N^2$  éléments selon les techniques itératives classiques. En d'autres termes, on calcule la matrice d'impédance de manière implicite. L'utilisation du préconditionneur selon l'invention dans ces méthodes rapides se fait sans difficulté. Ces méthodes sont intéressantes  
10 pour les objets de grandes taille, c'est à dire pour  $N$  grand. C'est le cas notamment pour les simulations d'antennes dites sur structure. On peut citer notamment les Méthodes Multipôles Multiniveaux et les Méthodes Intégrales Adaptatives, connues aussi dans la littérature anglo-saxonne sous les noms de « Fast Multilevel Multipole Methods » (FMM) et de « Adaptive Integral  
15 Method » (AIM). L'homme de l'art pourra aller chercher des éléments techniques sur :

- les méthodes rapides en général dans « *Fast Solution Methods In Electromagnetics* » de W. C. Chew, J.-M. Jin, C.-C. Lu, E. Michielssen, J.M. Song – IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 45(3):533-543,  
20 Mars 1997;
- les Méthodes Multipôles Multiniveaux dans « *Multilevel Fast Multipole Algorithm For Electromagnetic Scattering By Large Complex Objects* » de J. M. Song, C.-C. Lu, W.C. Chew, S.W. Lee – IEEE Trans on Antennas and Propagation, 45(10):1488-1493, Octobre 1997 ;
- 25 ▪ les Méthodes Intégrales Adaptatives dans « *AIM: Adaptive Integral Method For Solving Large Scale Electromagnetic Scattering And Radiation Problems* » de E. Bleszynski, M. Bleszynski, T. Jaroszewicz – Radio Science, 31(5):1225-1251, 1996 ;

dans la mesure où ces documents font partie intégrante de la description.

30 L'invention s'étend sans difficulté aux objets (antennes ou cibles) comportant des matériaux diélectriques. Dans ce cas, on cherche des courants électriques et magnétiques équivalents sur chaque interface. La matrice d'interaction entre ces courants comporte des blocs diagonaux du même type que la matrice  $M$  décrite ci-dessus. Un préconditionneur pour la

matrice d'interaction est donc obtenu en considérant la matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont du type de la matrice  $Z$  décrite ci-dessus.

## REVENDICATIONS

1. Algorithme de simulation électromagnétique, pour déterminer l'onde électromagnétique diffractée par un corps en régime monofréquentiel, à partir d'un maillage dudit corps et de l'excitation électromagnétique, caractérisé en ce qu'il comporte au moins :

- (a) une détermination d'une matrice M, dite matrice d'interaction, dont les coefficients sont déterminés à partir du maillage dudit corps ;
- (b) une détermination d'un préconditionneur Z de la matrice M, ce préconditionneur étant la traduction matricielle de l'opérateur  $\mathcal{J}^* \mathcal{M} \mathcal{J}$ , où  $\mathcal{M}$  est l'opérateur associé à M,  $\mathcal{J}$  l'opérateur produit vectoriel avec la normale à la surface dudit corps, et  $\mathcal{J}^*$  l'opérateur adjoint de  $\mathcal{J}$ ;
- (b) une détermination des courants qui circulent à la surface dudit corps, par un algorithme itératif de type gradient conjugué utilisant ledit préconditionneur Z, l'algorithme itératif permettant de résoudre une équation, dite d'équation intégrale de frontière de l'électromagnétisme, s'écrivant sous forme matricielle de la manière suivante :

$$M U = L$$

- où U est un vecteur que l'on cherche à déterminer, dont les coefficients représentent les courants de surface, et L est un vecteur connu, dont les coefficients représentent l'excitation électromagnétique ;
- (c) une détermination de l'onde diffractée par ledit corps, à partir desdits courants de surface.

2. Algorithme de simulation électromagnétique selon la revendication 1, caractérisé en ce que les coefficients du vecteur U sont exprimés dans la base usuelle de l'espace de Raviart-Thomas.

3. Algorithme de simulation électromagnétique selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que le préconditionneur Z est déterminé de manière implicite.



4. Algorithme de simulation électromagnétique selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que le préconditionneur Z est défini par la relation suivante :

$$Z = {}^t J M J$$

où J est une traduction matricielle de l'opérateur  $\mathcal{J}$ , et  ${}^t J$  la matrice transposée de J.

5. Algorithme de simulation électromagnétique selon la revendication 4, caractérisé en ce que la matrice J est définie par la relation suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -M6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M1 & 0 \\ 0 & M5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M3 & 0 \\ 0 & M4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M1 & M2 \\ {}^t M2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

15

où

$$M1_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \bar{\varphi}_i(A) \cdot \bar{\varphi}_j(A) dS_A$$

20

$$M2_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \psi_j(A) \operatorname{div}_A(\bar{\varphi}_i) dS_A$$

$$M3_{ij} = \int_{A \in \Gamma} (\bar{\varphi}_j(A) \wedge \bar{z}(A)) \cdot \bar{\varphi}_i(A) dS_A$$

$$M4_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \psi_j(A) \theta_i(A) dS_A$$

25

$$M5_{ij} = \int_{A \in \Gamma} \theta_j(A) \theta_i(A) dS_A$$

$$M6_{ij} = \left( \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\theta_j) \right)_{\varphi_i}$$

30

où

$\bar{\phi}_i$  est la base usuelle de l'espace de Raviart-Thomas ;

$\theta_i$  est la base des fonctions affines par triangles ;

5         $\psi_i$  est la base des fonctions constantes par triangles ;

A un point appartenant à la surface  $\Gamma$  dudit corps ;

10         $\bar{Z}(A)$  est un vecteur de norme unitaire, normal à la surface dudit  
corps au point A, et orienté vers l'extérieur.

15        6. Algorithme de simulation électromagnétique selon l'une des  
revendications précédentes, caractérisé en ce que l'algorithme itératif utilisé  
est un algorithme rapide, du type méthode multipôles multiniveaux.

7. Algorithme de simulation électromagnétique selon l'une des  
revendications 1 à 5, caractérisé en ce que l'algorithme itératif utilisé est un  
algorithme rapide, du type méthode méthode intégrale adaptative.

20        8. Algorithme de simulation électromagnétique selon l'une des  
revendications précédentes, caractérisé en ce que le corps est une antenne  
dont on cherche à déterminer une forme optimale, en utilisant l'algorithme de  
simulation dans un outil de conception d'antennes.

25        9. Algorithme de simulation électromagnétique selon l'une des  
revendications 1 à 7, caractérisé en ce que le corps est un objet de forme  
connue dont on cherche à déterminer la surface équivalente radar (SER).

30

35

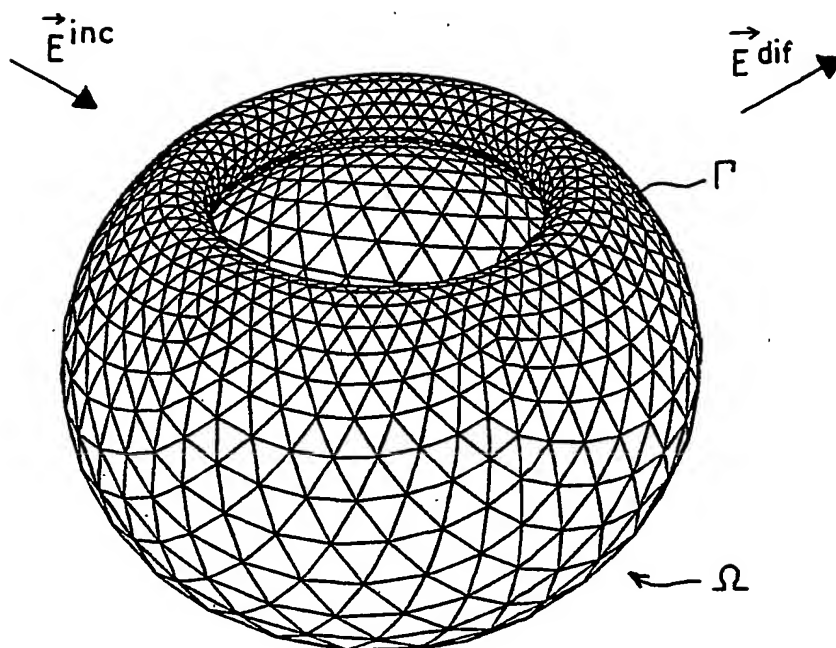


FIG.1

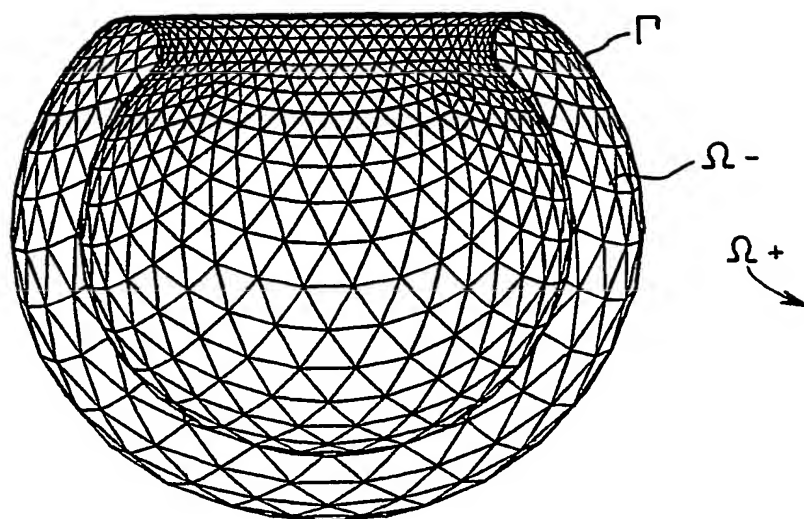


FIG.2

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

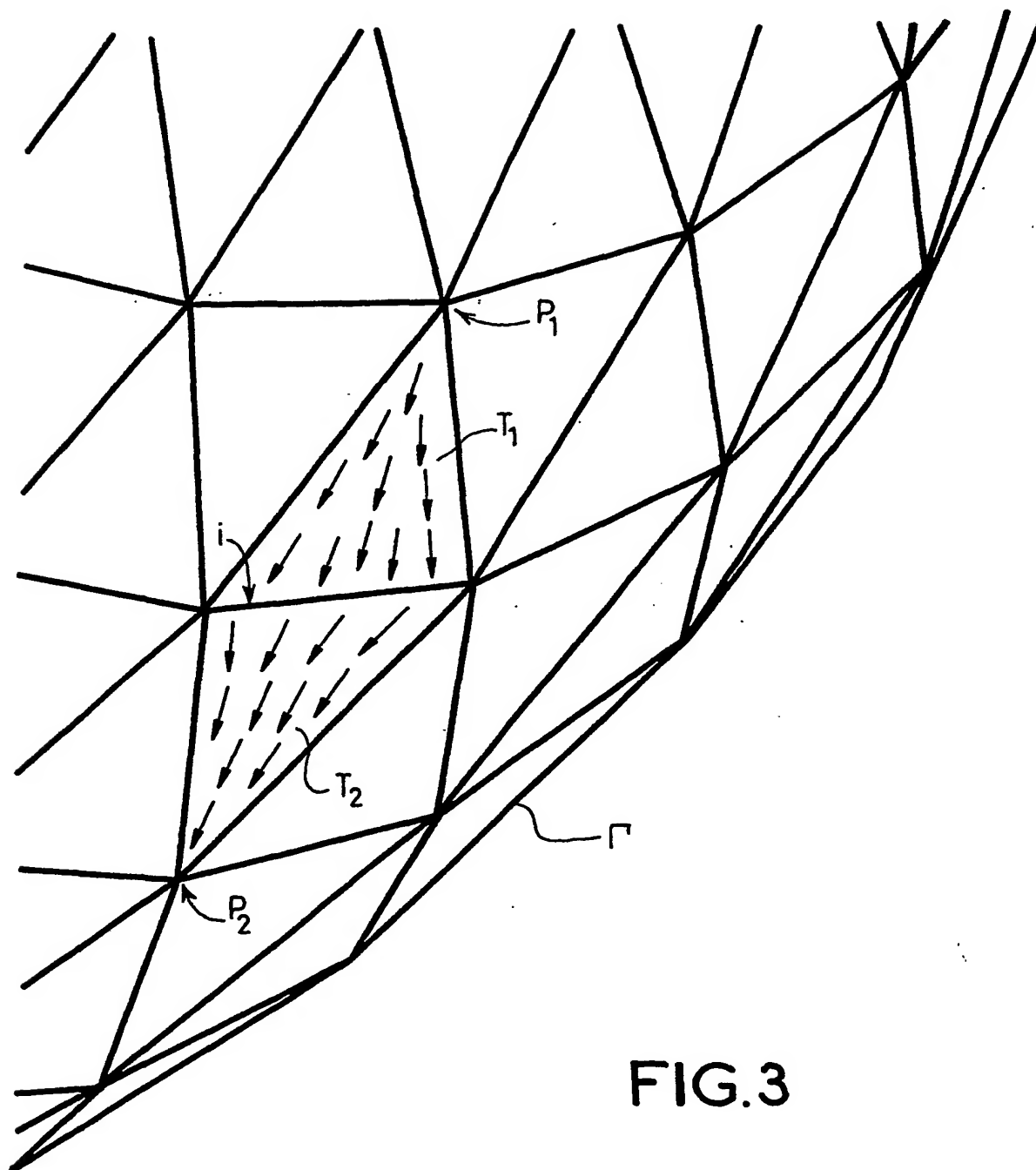


FIG.3

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

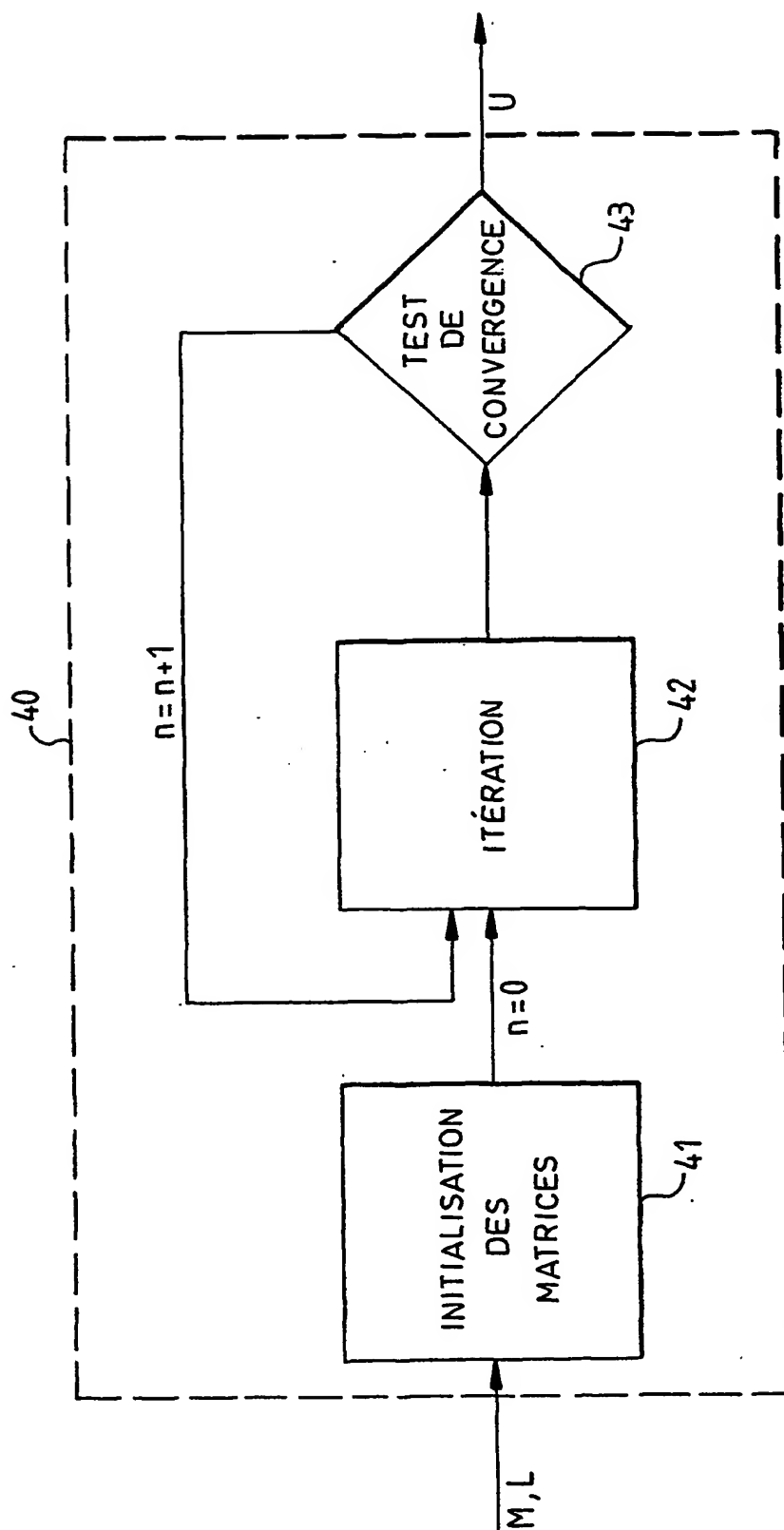
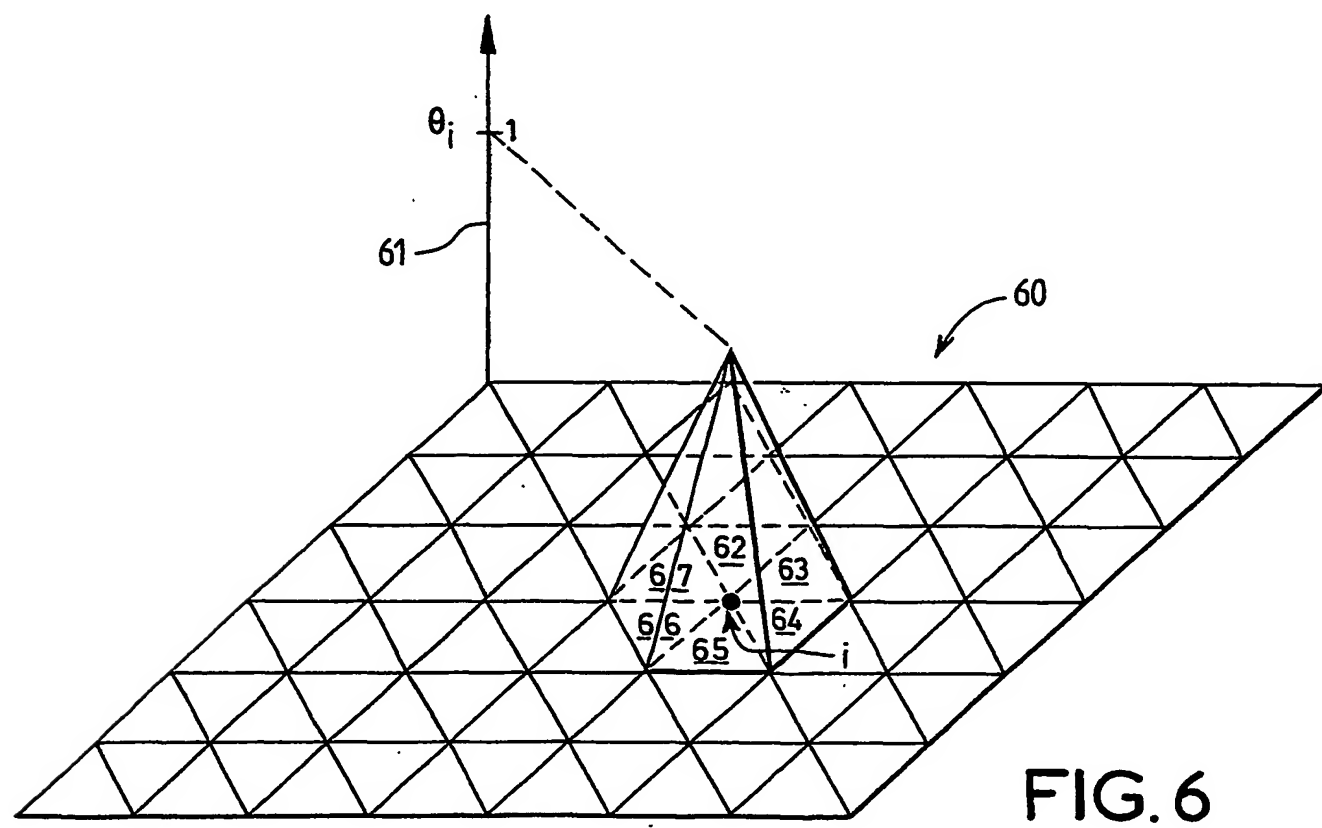
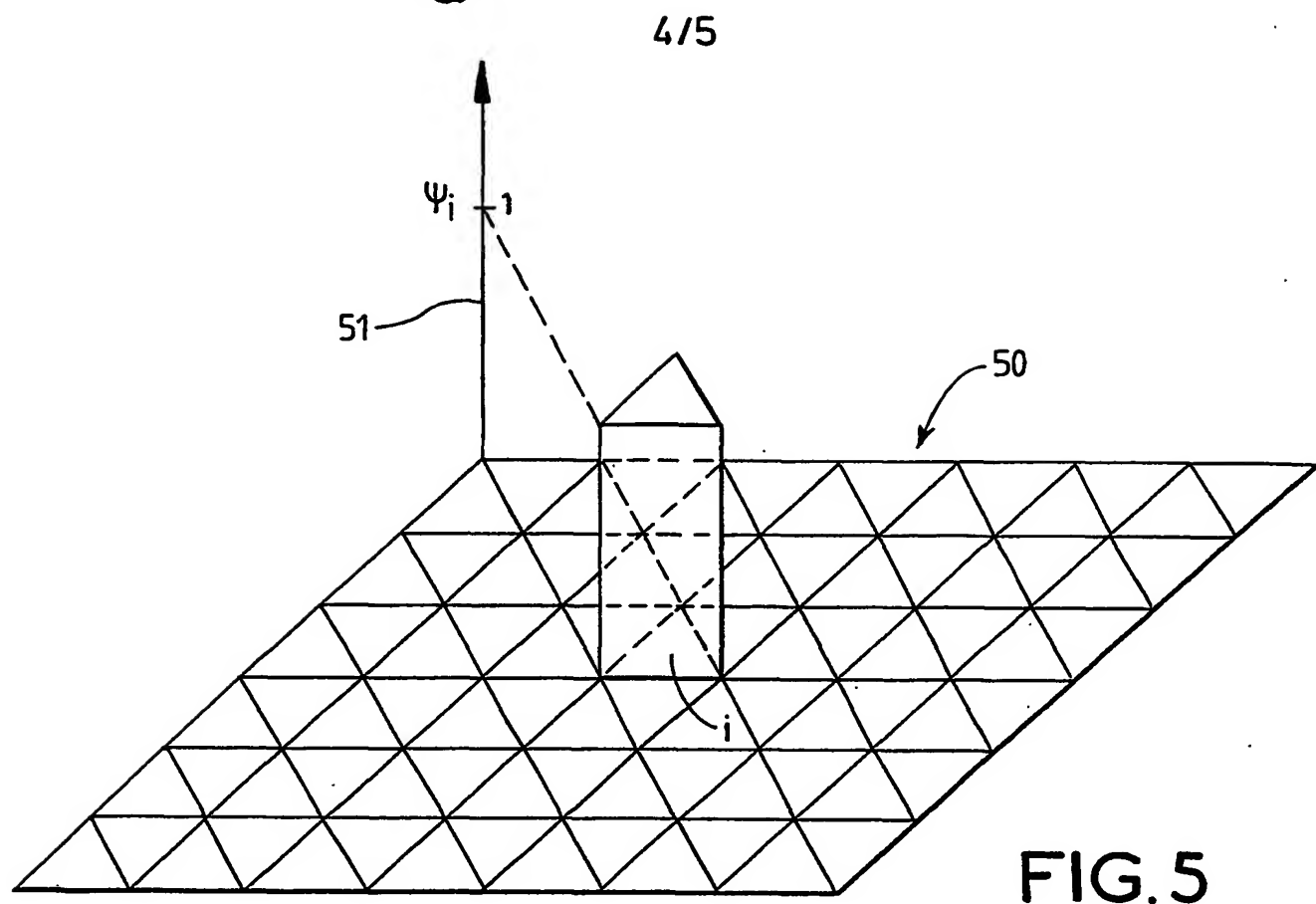


FIG.4

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**





**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

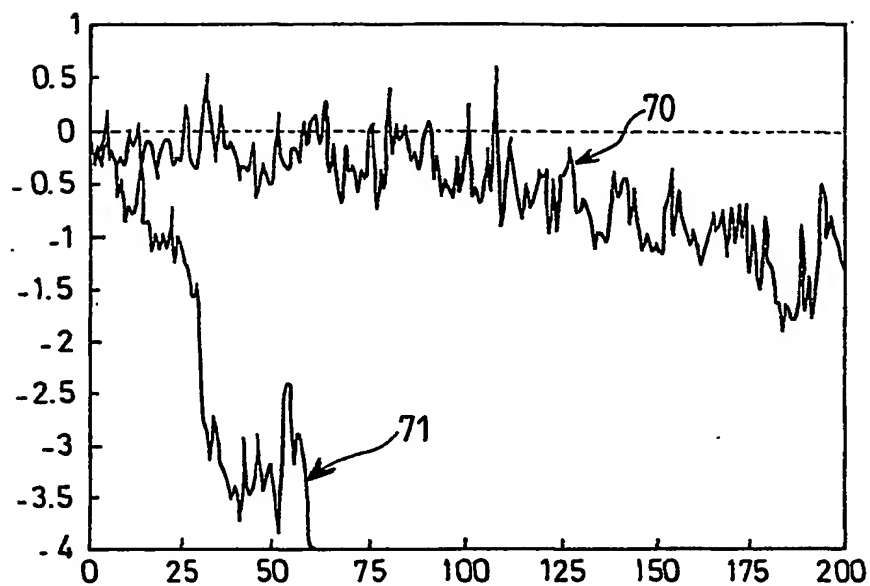


FIG. 7

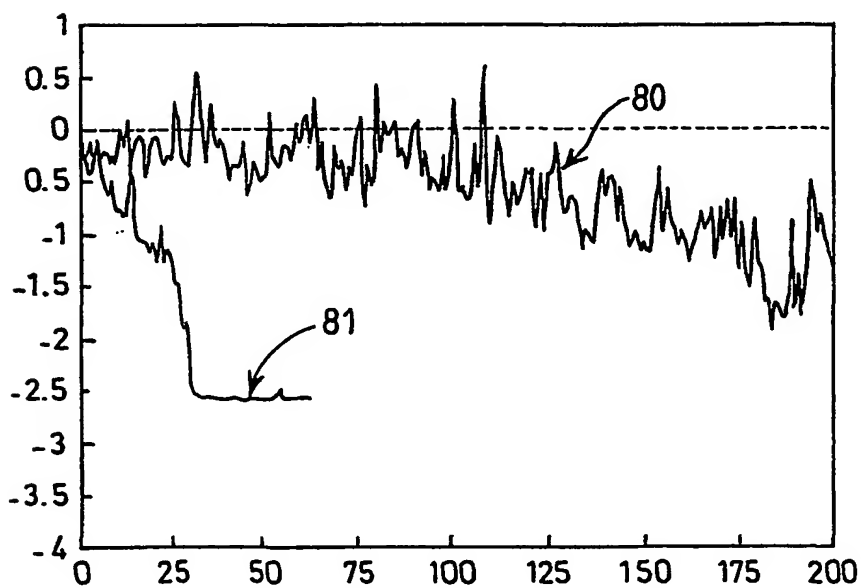


FIG. 8

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

# INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International Application No

PCT/FR 01/01715

**A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER**  
 IPC 7 G06F17/50 G06F17/16

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

**B. FIELDS SEARCHED**

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)

IPC 7 G06F

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the International search (name of data base and, where practical, search terms used)

INSPEC, EPO-Internal, WPI Data

**C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT**

Category *	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	<p>YAGHJIAN A D: "Banded-matrix preconditioning for electric-field integral equations"</p> <p>IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM 1997. DIGEST (CAT. NO.97CH36122), IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM 1997. DIGEST, MONTREAL, QUE., CANADA, 13-18 JULY 1997, pages 1806-1809 vol.3, XP002162413 1997, New York, NY, USA, IEEE, USA</p> <p>ISBN: 0-7803-4178-3</p> <p>the whole document</p> <p style="text-align: center;">— — — — — — / —</p>	1

☒ Further documents are listed in the continuation of box C.

☐ Patent family members are listed in annex.

\* Special categories of cited documents:

"A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

"E" earlier document but published on or after the international filing date

"L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

"O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

"P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

"T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

"X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

"Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art.

"&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

17 August 2001

Date of mailing of the international search report

24/08/2001

Name and mailing address of the ISA

European Patent Office, P.B. 5818 Patentlaan 2  
 NL - 2280 HV Rijswijk  
 Tel (+31-70) 340-2040, Tx. 31.651 epo nl,  
 Fax (+31-70) 340-3016

Authorized officer

Guingate, A

# INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International Application No

PCT/FR 01/01715

**C.(Continuation) DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT**

Category *	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	<p>DENG H ET AL: "Preconditioning of electromagnetic integral equations using pre-defined wavelet packet basis" ELECTRONICS LETTERS, 8 JULY 1999, IEE, UK, vol. 35, no. 14, pages 1144-1146, XP002162414 ISSN: 0013-5194 the whole document</p>	1
A	<p>BOWEN J M ET AL: "Use of preconditioners to ease disparate grid size problem" IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM. 1998 DIGEST. ANTENNAS: GATEWAYS TO THE GLOBAL NETWORK. HELD IN CONJUNCTION WITH: USNC/URSI NATIONAL RADIO SCIENCE MEETING (CAT. NO.98CH36194), IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERN, pages 1770-1773 vol.3, XP002162415 1998, New York, NY, USA, IEEE, USA ISBN: 0-7803-4478-2 the whole document</p>	1
A	<p>BANNELIER P ET AL: "Mixed finite elements method for antenna design" ANNALES DES TELECOMMUNICATIONS, SEPT.-OCT. 1989, FRANCE, vol. 44, no. 9-10, pages 464-474, XP000989716 ISSN: 0003-4347</p>	

# RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Données Internationale No

PCT/FR 01/01715

**A. CLASSEMENT DE L'OBJET DE LA DEMANDE**  
CIB 7 G06F17/50 G06F17/16

Selon la classification internationale des brevets (CIB) ou à la fois selon la classification nationale et la CIB

**B. DOMAINES SUR LESQUELS LA RECHERCHE A PORTE**

Documentation minimale consultée (système de classification suivi des symboles de classement)

CIB 7 G06F

Documentation consultée autre que la documentation minimale dans la mesure où ces documents relèvent des domaines sur lesquels a porté la recherche

Base de données électronique consultée au cours de la recherche internationale (nom de la base de données, et si réalisable, termes de recherche utilisés)

INSPEC, EPO-Internal, WPI Data

**C. DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS**

Catégorie *	Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indication des passages pertinents	no. des revendications visées
A	<p>YAGHJIAN A D: "Banded-matrix preconditioning for electric-field integral equations"</p> <p>IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM 1997. DIGEST (CAT. NO.97CH36122), IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM 1997. DIGEST, MONTREAL, QUE., CANADA, 13-18 JULY 1997, pages 1806-1809 vol.3, XP002162413 1997, New York, NY, USA, IEEE, USA ISBN: 0-7803-4178-3</p> <p>le document en entier</p> <p style="text-align: center;">--- -/-</p>	1

☒ Voir la suite du cadre C pour la fin de la liste des documents

☐ Les documents de familles de brevets sont indiqués en annexe

\* Catégories spéciales de documents cités:

- \*A\* document définissant l'état général de la technique, non considéré comme particulièrement pertinent
- \*E\* document antérieur, mais publié à la date de dépôt international ou après cette date
- \*L\* document pouvant jeter un doute sur une revendication de priorité ou cité pour déterminer la date de publication d'une autre citation ou pour une raison spéciale (telle qu'indiquée)
- \*O\* document se référant à une divulgation orale, à un usage, à une exposition ou tous autres moyens
- \*P\* document publié avant la date de dépôt international, mais postérieurement à la date de priorité revendiquée

- \*T\* document ultérieur publié après la date de dépôt international ou la date de priorité et n'appartenant pas à l'état de la technique pertinent, mais cité pour comprendre le principe ou la théorie constituant la base de l'invention
- \*X\* document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme nouvelle ou comme impliquant une activité inventive par rapport au document considéré isolément
- \*Y\* document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme impliquant une activité inventive lorsque le document est associé à un ou plusieurs autres documents de même nature, cette combinaison étant évidente pour une personne du métier
- \*&\* document qui fait partie de la même famille de brevets

Date à laquelle la recherche internationale a été effectivement achevée

17 août 2001

Date d'expédition du présent rapport de recherche internationale

24/08/2001

Nom et adresse postale de l'administration chargée de la recherche internationale

Office Européen des Brevets, P.B. 5818 Patentlaan 2  
NL - 2280 HV Rijswijk  
Tel: (+31-70) 340-2040, Tx. 31 651 epo nl,  
Fax: (+31-70) 340-3016

Fonctionnaire autorisé

Guingale, A

# RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Demande Internationale No

PCT/FR 01/01715

## C.(suite) DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS

Catégorie	Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indication des passages pertinents	no. des revendications visées
A	<p>DENG H ET AL: "Preconditioning of electromagnetic integral equations using pre-defined wavelet packet basis" ELECTRONICS LETTERS, 8 JULY 1999, IEE, UK, vol. 35, no. 14, pages 1144-1146, XP002162414 ISSN: 0013-5194 le document en entier</p> <p>---</p>	1
A	<p>BOWEN J M ET AL: "Use of preconditioners to ease disparate grid size problem" IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM. 1998 DIGEST. ANTENNAS: GATEWAYS TO THE GLOBAL NETWORK. HELD IN CONJUNCTION WITH: USNC/URSI NATIONAL RADIO SCIENCE MEETING (CAT. NO.98CH36194), IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERN, pages 1770-1773 vol.3, XP002162415 1998, New York, NY, USA, IEEE, USA ISBN: 0-7803-4478-2 le document en entier</p> <p>---</p>	1
A	<p>BANNELIER P ET AL: "Mixed finite elements method for antenna design" ANNALES DES TELECOMMUNICATIONS, SEPT.-OCT. 1989, FRANCE, vol. 44, no. 9-10, pages 464-474, XP000989716 ISSN: 0003-4347</p> <p>-----</p>	



## ARRIVÉE TRAITE DE COOPERATION EN MATIERE DE BREVETS

20. AOUT 2001

TRANS. A.....

PCT

Expéditeur : le BUREAU INTERNATIONAL

Destinataire:

LUCAS, Laurent  
Thales Intellectual Property  
13, av. du Prés. Salvador Allende  
F-94117 Arcueil Cédex  
FRANCE

**NOTIFICATION RELATIVE  
A LA PRESENTATION OU A LA TRANSMISSION  
DU DOCUMENT DE PRIORITE**

(instruction administrative 411 du PCT)

Date d'expédition (jour/mois/année) 03 août 2001 (03.08.01)	<b>NOTIFICATION IMPORTANTE</b>
Référence du dossier du déposant ou du mandataire 62142	
Demande internationale no PCT/FR01/01715	
Date de publication internationale (jour/mois/année) Pas encore publiée	
Date du dépôt international (jour/mois/année) 01 juin 2001 (01.06.01)	
Date de priorité (jour/mois/année) 09 juin 2000 (09.06.00)	
Déposant THALES etc	

- La date de réception (sauf lorsque les lettres "NR" figurent dans la colonne de droite) par le Bureau international du ou des documents de priorité correspondant à la ou aux demandes énumérées ci-après est notifiée au déposant. Sauf indication contraire consistant en un astérisque figurant à côté d'une date de réception, ou les lettres "NR", dans la colonne de droite, le document de priorité en question a été présenté ou transmis au Bureau international d'une manière conforme à la règle 17.1.a) ou b).
- Ce formulaire met à jour et remplace toute notification relative à la présentation ou à la transmission du document de priorité qui a été envoyée précédemment.
- Un astérisque(\*) figurant à côté d'une date de réception dans la colonne de droite signale un document de priorité présenté ou transmis au Bureau international mais de manière non conforme à la règle 17.1.a) ou b). Dans ce cas, **l'attention du déposant est appelée** sur la règle 17.1.c) qui stipule qu'aucun office désigné ne peut décider de ne pas tenir compte de la revendication de priorité avant d'avoir donné au déposant la possibilité de remettre le document de priorité dans un délai raisonnable en l'espèce.
- Les lettres "NR" figurant dans la colonne de droite signalent un document de priorité que le Bureau international n'a pas reçu ou que le déposant n'a pas demandé à l'office récepteur de préparer et de transmettre au Bureau international, conformément à la règle 17.1.a) ou b), respectivement. Dans ce cas, **l'attention du déposant est appelée** sur la règle 17.1.c) qui stipule qu'aucun office désigné ne peut décider de ne pas tenir compte de la revendication de priorité avant d'avoir donné au déposant la possibilité de remettre le document de priorité dans un délai raisonnable en l'espèce.

<u>Date de priorité</u>	<u>Demande de priorité n°</u>	<u>Pays, office régional ou</u> <u>office récepteur selon le PCT</u>	<u>Date de réception du</u> <u>document de priorité</u>
09 juin 2000 (09.06.00)	00/07456	FR	24 juil 2001 (24.07.01)

Bureau international de l'OMPI  
34, chemin des Colombettes  
1211 Genève 20, Suisse

no de télécopieur (41-22) 740.14.35

Fonctionnaire autorisé:

Cécile Chatel (Fax 338.87.40)

no de téléphone (41-22) 338.83.38

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

# TRAITÉ DE COOPÉRATION EN MATIÈRE DE BREVETS

PCT

AVIS INFORMANT LE DÉPOSANT DE LA  
COMMUNICATION DE LA DEMANDE  
INTERNATIONALE AUX OFFICES DÉSIGNÉS

(règle 47.1.c), première phrase, du PCT)

Expéditeur: le BUREAU INTERNATIONAL

Destinataire:

LUCAS, Laurent  
Thales Intellectual Property  
13, av. du Prés. Salvador Allende  
F-94117 Arcueil Cédex  
FRANCE

ARRIVÉE T.P.I

26.DEC.2001

TRANS. A

Date d'expédition (jour/mois/année) 13 décembre 2001 (13.12.01) <input checked="" type="checkbox"/>		
Référence du dossier du déposant ou du mandataire 62142		
Demande internationale n° PCT/FR01/01715	Date du dépôt international (jour/mois/année) 01 juin 2001 (01.06.01)	Date de priorité (jour/mois/année) 09 juin 2000 (09.06.00)
Déposant THALES etc		

AVIS IMPORTANT

1. Il est notifié par la présente qu'à la date indiquée ci-dessus comme date d'expédition de cet avis, le Bureau international a communiqué, comme le prévoit l'article 20, la demande internationale aux offices désignés suivants:

US

Conformément à la règle 47.1.c), troisième phrase, ces offices acceptent le présent avis comme preuve déterminante du fait que la communication de la demande internationale a bien eu lieu à la date d'expédition indiquée plus haut, et le déposant n'est pas tenu de remettre de copie de la demande internationale à l'office ou aux offices désignés.

2. Les offices désignés suivants ont renoncé à l'exigence selon laquelle cette communication doit être effectuée à cette date:

EP

La communication sera effectuée seulement sur demande de ces offices. De plus, le déposant n'est pas tenu de remettre de copie de la demande internationale aux offices en question (règle 49.1)a-bis)).

3. Le présent avis est accompagné d'une copie de la demande internationale publiée par le Bureau international le 13 décembre 2001 (13.12.01) sous le numéro WO 01/95159

## RAPPEL CONCERNANT LE CHAPITRE II (article 31.2)a) et règle 54.2)

Si le déposant souhaite reporter l'ouverture de la phase nationale jusqu'à 30 mois (ou plus pour ce qui concerne certains offices) à compter de la date de priorité, la demande d'examen préliminaire international doit être présentée à l'administration compétente chargée de l'examen préliminaire international avant l'expiration d'un délai de 19 mois à compter de la date de priorité.

Il appartient exclusivement au déposant de veiller au respect du délai de 19 mois.

Il est à noter que seul un déposant qui est ressortissant d'un État contractant du PCT lié par le chapitre II ou qui y a son domicile peut présenter une demande d'examen préliminaire international (actuellement, tous les États contractants du PCT sont liés par le chapitre II).

## RAPPEL CONCERNANT L'OUVERTURE DE LA PHASE NATIONALE (article 22 ou 39.1))

Si le déposant souhaite que la demande internationale procède en phase nationale, il doit, dans le délai de 20 mois ou de 30 mois, ou plus pour ce qui concerne certains offices, accomplir les actes mentionnés dans ces dispositions auprès de chaque office désigné ou élu.

Pour d'autres informations importantes concernant les délais et les actes à accomplir pour l'ouverture de la phase nationale, voir l'annexe du formulaire PCT/IB/301 (Notification de la réception de l'exemplaire original) et le Guide du déposant du PCT, volume II.

Bureau international de l'OMPI 34, chemin des Colombettes 1211 Genève 20, Suisse n° de télécopieur (41-22) 740.14.35	Fonctionnaire autorisé J. Zahra n° de téléphone (41-22) 338.91.11
---	---

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

## INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International Application No

PCT/FR 01/01715

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER  
 IPC 7 G06F17/50 G06F17/16

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

## B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)  
 IPC 7 G06F

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the International search (name of data base and, where practical, search terms used)

INSPEC, EPO-Internal, WPI Data

## C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category *	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	<p>YAGHJIAN A D: "Banded-matrix preconditioning for electric-field integral equations"            IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM 1997. DIGEST (CAT. NO. 97CH36122), IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM 1997. DIGEST, MONTREAL, QUE., CANADA, 13-18 JULY 1997, pages 1806-1809 vol.3, XP002162413 1997, New York, NY, USA, IEEE, USA            ISBN: 0-7803-4178-3            the whole document</p> <p style="text-align: center;">--- -/--</p>	1



Further documents are listed in the continuation of box C.



Patent family members are listed in annex

## \* Special categories of cited documents:

\*A\* document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

\*E\* earlier document but published on or after the international filing date

\*L\* document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

\*O\* document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

\*P\* document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

\*T\* later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

\*X\* document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

\*Y\* document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art.

\*&\* document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search

17 August 2001

Date of mailing of the international search report

24/08/2001

Name and mailing address of the ISA

European Patent Office, P.B. 5818 Patentlaan 2  
 NL - 2280 HV Rijswijk  
 Tel. (+31-70) 340-2040, Tx. 31.651 epo nl.  
 Fax (+31-70) 340-3018

Authorized officer

Guingate, A

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

# INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International Application No

PCT/FR 01/01715

C.(Continuation) DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT		
Category *	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	DENG H ET AL: "Preconditioning of electromagnetic integral equations using pre-defined wavelet packet basis" ELECTRONICS LETTERS, 8 JULY 1999, IEE, UK, vol. 35, no. 14, pages 1144-1146, XP002162414 ISSN: 0013-5194 the whole document	1
A	BOWEN J M ET AL: "Use of preconditioners to ease disparate grid size problem" IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM. 1998 DIGEST. ANTENNAS: GATEWAYS TO THE GLOBAL NETWORK. HELD IN CONJUNCTION WITH: USNC/URSI NATIONAL RADIO SCIENCE MEETING (CAT. NO.98CH36194), IEEE ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERN, pages 1770-1773 vol.3, XP002162415 1998, New York, NY, USA, IEEE, USA ISBN: 0-7803-4478-2 the whole document	1
A	BANNELIER P ET AL: "Mixed finite elements method for antenna design" ANNALES DES TELECOMMUNICATIONS, SEPT.-OCT. 1989, FRANCE, vol. 44, no. 9-10, pages 464-474, XP000989716 ISSN: 0003-4347	



**THIS PAGE BLANK (USPTO)**